Exame final nacional de Matemática A **(2026, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Como existem 4 livros policiais, que devem ser lidos de seguida, existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ formas de os agrupar 4 ordens adjacentes.
   Esta sequência de livros pode ser lido antes dos restantes, após o primeiro não policial, após o segundo não policial, após o terceiro não policial, após o quarto não presencial, ou no final de todos os não policiais, ou seja em 5 ordenações diferentes. Os restantes 4 livros, não policiais, podem ocupar cada uma das 4 ordenações existem 4! formas diferentes de os ordenar.
   Assim o número total de maneiras que se podem dispor os 8 livros nas condições descritas, é:

$$4! \times 5 \times 4! = 5 \times 4! \times 4!$$

   Resposta: **Opção D**

2.

   2.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 3$, temos que verificar se $f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$.

   - $f(3) = 4 - e^{3-3}(3+1) - \frac{1}{2} \times 3^2 = 4 - 1 \times 4 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$
   - $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(4 - e^{3-x}(x+1) - \frac{1}{2}x^2\right) = 4 - e^{3-3}(3+1) - \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$
   - $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9} = \frac{e^{3-3} - 1}{3^2 - 9} = \frac{e^0 - 1}{9 - 9} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

     Usando a regra de l'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{\left(e^{x-3} - 1\right)'}{\left(x^2 - 9\right)'} = \lim_{x \to 3^+} \frac{e^{x-3} - 0}{2x - 0} = \frac{e^{3-3}}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

   Como $f(3) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

2.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,3[$:

$$f'(x) = \left(4 - e^{3-x}(x+1) - \frac{1}{2}x^2\right)' = (4)' - \left(e^{3-x}(x+1)\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' =$$

$$= 0 - \left(\left(e^{3-x}\right)'(x+1) + e^{3-x}(x+1)'\right) - \frac{1}{2} \times 2x = -\left(-e^{3-x}(x+1) + e^{3-x} \times 1\right) - x =$$

$$= e^{3-x}(x+1) - e^{3-x} - x = e^{3-x}\big((x+1) - 1\big) - x = e^{3-x} \times x - x = x\left(e^{3-x} - 1\right)$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,3[$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(e^{3-x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{3-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{3-x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3 - x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x = 0 - 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{x = 3}_{\text{C.Imp.}, x \in]-\infty,3[}$$

Como no intervalo $]-\infty,3[$ a equação $f'(x) = 0$ só tem um zero, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	0		3
f'	+	0	−	n.d.
f	↘	min	↗	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é crescente no intervalo $[0,3[$;
- tem um mínimo relativo para $x = 0$.

2.3. A abcissa dos pontos do gráficos da função f, com a ordenada simétrica da abcissa, são soluções da equação

$$f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$$

Assim vamos mostrar que a função $g(x) = f(x) + x$ tem pelo menos um zero no intervalo $]-1,0[$.

Como a função f, e também a função f resultam de operações sucessivas de funções contínuas em $]-\infty,3]$, são contínuas neste intervalo, e em particular, no intervalo $[-1,0]$.

Como $g(0) < 0 < g(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $g(x) = 0$ no intervalo $]-1,0[$, isto é, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de f cuja ordenada é igual simétrica da abcissa, neste intervalo.

C.A.

$$g(-1) = f(-1) + (-1) = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$$

$$g(0) = f(0) + 0 = 4 - e^3 \approx -16{,}09$$

3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos aos valores da TMB, e calculando as respetivas medidas estatísticas, verificamos que a média dos valores da TMB das sete mulheres, arredondada às unidades, é 1374 quilocalorias por dia.

   Procedendo da mesma forma para os dados correspondentes ao IMC, verificamos que os primeiro e terceiro quartil destes valores são, respetivamente $Q_1 = 23{,}4$ e $Q_3 = 27{,}5$, pelo que apenas 3 valores (24,6; 23,9 e 23,6) pertencem ao intervalo $]Q_1,Q_3[$, isto é que existem exatamente 3 mulheres com IMC pertencente ao intervalo $]Q_1,Q_3[$.

   Com os dados do IMC na lista correspondente às abcissas dos pontos do diagrama de dispersão e os dados da TMB correspondentes às ordenadas dos pontos, podemos calcular o valor do coeficiente de correlação linear, cujo arredondamento às centésimas, é $r \approx 0{,}881$. Assim, podemos concluir que o coeficiente de correlação linear entre as variáveis apresentadas na tabela é superior ao coeficiente de correlação linear entre as variáveis apresentadas no gráfico da figura, porque este apresenta uma correlação negativa, ou seja, um coeficiente de correlação negativo.

   Usando o modelo de regressão linear apresentado no gráfico da figura, e calculando a ordenada do ponto da reta que tem abcissa 43, obtemos o valor $y = -9{,}02 \times 43 + 1777{,}62 = 1389{,}76$, ou seja, admitindo a validade do modelo de regressão linear apresentado, uma mulher com 43 anos terá uma TMB aproximadamente igual a 1390 quilocalorias por dia (valor arredondado às unidades)

   Logo, as correspondências corretas são:

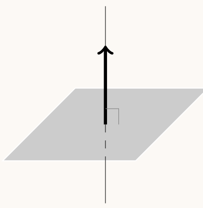
   - **(a) → (2)**
   - **(b) → (1)**
   - **(c) → (3)**
   - **(d) → (3)**

4.

   4.1. Como o plano deve ser perpendicular à reta DH, o vetor diretor normal da reta é também um vetor normal do plano, $\vec{u}(1,3,0)$, pelo que a equação do plano que pretendemos definir é da forma:

   $$x + 3y + d = 0$$

   Como se pretende que o plano contenha o ponto G de coordenadas $(6,9,0)$, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

   $$6 + 3(9) + d = 0 \Leftrightarrow 6 + 27 + d = 0 \Leftrightarrow 33 + d = 0 \Leftrightarrow d = -33$$

   E assim, uma equação que define o plano perpendicular à reta DH e que passa no ponto G, é:

   $$x + 3y - 33 = 0$$

   Resposta: **Opção B**

4.2. Como as retas AG e DH são paralelas, o vetor diretor da reta DH também é um vetor diretor da reta AG, pelo que, como se conhecem as coordenadas do ponto G, uma equação vetorial da reta AG, é:

$$(x,y,z) = (6,9,0) + k(1,3,0),\ k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(6+k\,,9+3k\,,0)$, e assim, vem que como o ponto A pertence ao eixo Ox:

- tem ordenada nula, ou seja: $y_A = 0 \Leftrightarrow 9+3k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{9}{3} \Leftrightarrow k=-3$;
- o valor da abcissa é: $x_A = 6+k = 6+(-3) = 3$.

Como os pontos A, B e G têm todos cota nula, o plano ABG é o plano xOy, pelo que o ponto D tem a abcissa e a ordenada iguais à do ponto A e a cota igual à do ponto C, ou seja, as coordenadas do ponto D são $(3,0,4)$.

Observando que:

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CG} = G - C = (6,9,0) - (0,6,4) = (6,3,-4)$$

Podemos determinar as coordenadas do ponto F:

$$F = D + \overrightarrow{DF} = (3,0,4) + (6,3,-4) = (9,3,0)$$

Desta forma o raio da superfície esférica é:

$$\overline{AF} = \sqrt{(3-9)^2+(0-3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{36+9+0} = \sqrt{45}$$

E assim, uma equação da superfície esférica de centro no ponto A e que passa no ponto F, é:

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = \left(\sqrt{45}\right)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+z^2 = 45$$

5.

5. **(AE 2018)**
Observando os primeiros termos da sucessão $u_n = n^2 - 4n$ temos:

- $u_1 = 1^2 - 4(1) = -3$;
- $u_2 = 2^2 - 4(2) = -4$;
- $u_3 = 3^2 - 4(3) = -3$.

Assim, como $u_2 < u_3$ a sucessão não é monótona decrescente.

O gráfico da sucessão $2n+3$ é um conjunto de pontos que pertencem a uma reta de declive positivo, pelo que a sucessão não é monótona decrescente.

Como a sucessão $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ é uma progressão geométrica com o primeiro termo positivo $\left(\frac{3}{2} > 0\right)$ e de razão maior que 1 $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$ é uma sucessão monótona crescente.

Como a sucessão $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica com o primeiro termo positivo $\left(\frac{2}{3} > 0\right)$ e de razão menor que 1 $\left(\frac{2}{3} < 1\right)$ é uma sucessão monótona decrescente.

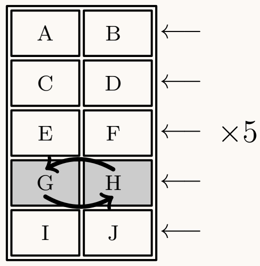
Resposta: **Opção D**

5. **(AE 2023)**
A soma de todos os termos de uma progressão geométrica de razão r, com $r \in]-1,1[$ é um valor finito.

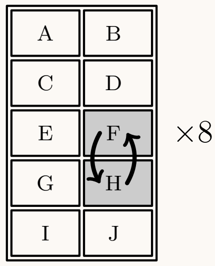
Assim observando que a sucessão $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica de razão maior que -1 e menor que 1 $\left(-1 < \frac{2}{3} < 1\right)$ temos que a soma de todos os seus termos é um valor finito.

Resposta: **Opção D**

6. Os pares de sapatos pretos e brancos ficarão em compartimentos adjacentes se ficarem na mesma linha, ou na mesma coluna e em linhas adjacentes.



No caso de ficarem na mesma linha, existem 5×2 possibilidades, correspondendo às 5 linhas, e com a possibilidade de trocarem de posição ficando ambos nos mesmos compartimentos. O número total de disposições dos 5 pares de sapatos nestas condições ainda deve prever a disposições dos restantes 3 pares nos restantes 8 comprimentos, ou seja, um total de $5 \times 2 \times {}^8A_3$ disposições.



No caso de ficarem na mesma coluna em posições adjacentes, existem 8×2 possibilidades, correspondendo aos 8 pares de posições em linhas adjacentes (AC, CE, EG, GI, BD, DF, FH e HJ), e com a possibilidade de trocarem de posição ficando ambos ficando ambos nos mesmos compartimentos. O número total de disposições dos 5 pares de sapatos nestas condições ainda deve prever a disposições dos restantes 3 pares nos restantes 8 comprimentos, ou seja, um total de $8 \times 2 \times {}^8A_3$ disposições.

Assim, o número total de casos favoráveis é: $5 \times 2 \times {}^8A_3 + 8 \times 2 \times {}^8A_3$.

Desta forma, recorrendo à Regra de LaPlace, temos que a probabilidade de o par de sapatos brancos e o par de sapatos pretos ficarem em compartimentos adjacentes, é:

$$\frac{5 \times 2 \times {}^8A_3 + 8 \times 2 \times {}^8A_3}{{}^{10}A_5} = \frac{13}{45}$$

7. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma pessoa que, naquele dia, esteve na praia da Ilha do Pessegueiro, e os acontecimentos:

S:«Ter usado o guarda-sol»
V:«Ter usado o para-vento»

Temos que $P(S) = 0{,}75$; $P\left(\overline{S} \cap \overline{V}\right) = 0{,}22$ e $P(V|S) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

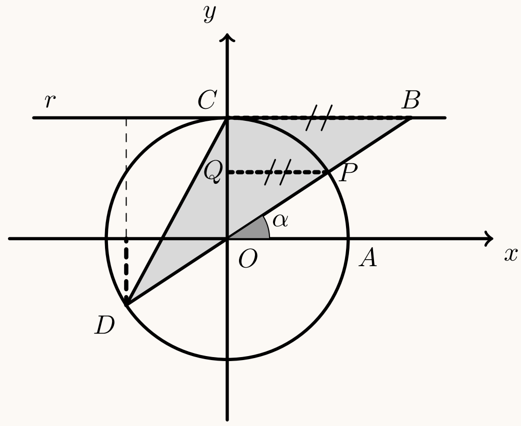
	S	$\overline{S}$	
V	0,15		
$\overline{V}$	0,6	0,22	0,82
	0,75		

- $P(V|S) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = 0{,}2 \Leftrightarrow P(V \cap S) = 0{,}2 \times 0{,}75 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow P(V \cap S) = 0{,}15$;
- $P\left(S \cap \overline{V}\right) = P(S) - P(S \cap V) = 0{,}75 - 0{,}15 = 0{,}6$;
- $P\left(\overline{V}\right) = P\left(S \cap \overline{V}\right) + P\left(\overline{S} \cap \overline{V}\right) = 0.6 + 0{,}22 = 0{,}82$.

Assim, a probabilidade de uma pessoa que, naquele dia, esteve na praia da Ilha do Pessegueiro escolhido, ao acaso, ter utilizado o guarda-sol sabendo que não utilizou o para-vento, na forma de percentagem, arredondado às unidades, é 73%, porque:

$$P\left(S|\overline{V}\right) = \frac{P\left(S \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}6}{0{,}82} \approx 0{,}731$$

8. Designado por P o ponto de interseção da reta BD com a circunferência, diferente do ponto D, e por Q a projeção ortogonal do ponto P no eixo Oy, temos que:



- $\overline{PQ} = \cos\alpha$;
- $\overline{OQ} = \operatorname{sen}\alpha$;
- como os triângulos $[OPQ]$ e $[OBC]$ são semelhantes, vem que:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Leftrightarrow \overline{CB} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

- a ordenada do ponto D é simétrica da ordenada do ponto P, isto é, $y_D = -y_P = -\operatorname{sen}\alpha$.

Assim, considerando $[CB]$ como a base do triângulo $[BCD]$, a medida da altura é $1+|-\operatorname{sen}\alpha| = 1+\operatorname{sen}\alpha$, pelo que a sua área é dada por:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{CB}\times(1+|y_D|)}{2} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\times(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2} = \frac{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

9.

9. **(AE 2018)**
Observando que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$ vem que:

$$1-\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{sen}x\right)^2 = 1-(\cos x-\operatorname{sen}x)^2 = 1-(\cos^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2 x) =$$

$$= 1-(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x) = 1-(1-2\operatorname{sen}x\cos x) = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}(2x)$$

9. **(AE 2023)**
Temos que:

- $f(1) = 1^4 \ln 1 - 1 = -1$
- $f(2) = 2^4 \ln 2 - 1 \approx 10{,}1$

Como f é contínua, existe pelo menos um zero de h no intervalo $]1{,}2[$, e assim pelo método da bisseção, temos:

- Intervalo $[0; 1]$:

  $x_1 = \dfrac{2+1}{2} = 1{,}5$ (solução aproximada com erro inferior a $\dfrac{2-1}{2} = 0{,}5$)

  $f(1{,}5) = 1{,}5^4 \ln 1{,}5 - 1 \approx 1{,}05$

  Como $f(1) < 0$ e $f(1{,}5) > 0$, o zero da função pertence ao intervalo $]1; 1{,}5[$.

- Intervalo $]1; 1{,}5[$:

  $x_2 = \dfrac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$ (solução aproximada com erro inferior a $\dfrac{1{,}5-1}{2} = 0{,}25$)

  $f(1{,}25) = 1{,}25^4 \ln 1{,}25 - 1 \approx -0{,}46$

  Como $f(1{,}25) < 0$ e $f(1{,}5) > 0$, o zero da função pertence ao intervalo $]1{,}25; 1{,}5[$.

- Intervalo $]1{,}25; 1{,}5[$:

  $x_3 = \dfrac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375$ (solução aproximada com erro inferior a $\dfrac{1{,}5-1{,}25}{2} = 0{,}125$)

  $f(1{,}375) = 1{,}25^4 \ln 1{,}25 - 1 \approx -0{,}14$

  Como $f(1{,}25) < 0$ e $f(1{,}375) > 0$, o zero da função pertence ao intervalo $]1{,}25; 1{,}375[$.

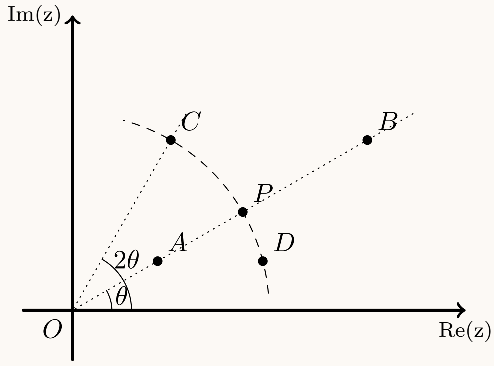
- Intervalo $]1{,}25; 1{,}375[$:

  $x_4 = \dfrac{1{,}25+1{,}375}{2} = 1{,}3125$ (solução aproximada com erro inferior a $\dfrac{1{,}375-1{,}25}{2} = 0{,}0625$).

Logo $x = 1{,}3125$ é uma aproximação do zero da função f, com erro inferior a $0{,}1$.

10. Como $z = e^{i\theta}$, então, temos que:

$$z^2 = (e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$$



Ou seja:

- $|z| = |z^2|$;
- $\operatorname{Arg}(z^2) = 2\theta = 2 \times \operatorname{Arg} z$

E assim, o afixo de z^2 deve ser equidistante da origem em relação ao ponto P, e deve definir um ângulo com a origem e o semieixo positivo da parte real com o dobro da amplitude, pelo que, de entre as opções apresentadas o único que pode cumprir cumulativamente estas duas condições é o ponto C.

Resposta: **Opção C**

11. Temos que $i^{37} = i^{1+4\times 9} = i^1 = i$.

Escrevendo $-\sqrt{3}+i$ na forma trigonométrica $(\rho e^{i\alpha})$ temos:

- $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; como $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$, α é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

Desta forma temos que $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, pelo que:

$$w = \frac{-\sqrt{3}+i}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Assim, temos que:

$$z^2 = w \Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0{,}1\}$$

Pelo que, os dois números complexos que são solução da equação, são:

- $(k=0) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\times 0\times\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{2\times 3}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
- $(k=1) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\times 1\times\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{11\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \cos\dfrac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

12. Como a Inês irá depositar 500 euros por ano durante 25 anos, o total das quantias depositadas é $500 \times 25 = 12\,500$ euros.

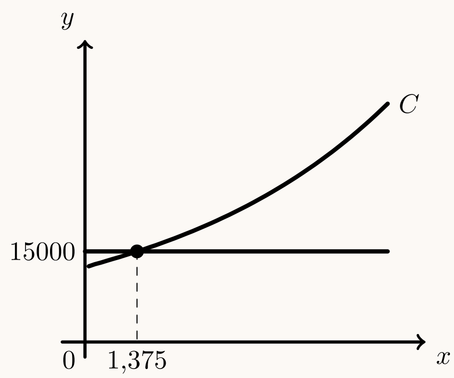
Como pretende conseguir um acréscimo de 20%, relativamente ao valor total dos depósitos, o valor do acréscimo é $0{,}2 \times 12\,500 = 2500$ euros, pelo a taxa de juro anual, em percentagem, (j) que a Inês deverá negociar com o banco, é a solução da equação:

$$C(j) = 12\,500 + 2500 \Leftrightarrow C(j) = 15\,000$$

Desta forma, inserimos na calculadora gráfica a expressão da função $C(j)$ e da função constante $f(x) = 15000$.

Visualizamos os gráficos das funções reproduzidos na figura ao lado e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (arredondada às milésimas) da abcissa do ponto de interseção dos gráficos das duas funções, a que correspondem a taxa de juro k:

$$k \approx 1{,}375$$



Assim, para que a Inês obtenha, no final dos 25 anos, um acréscimo de 20% relativamente ao total das quantias depositadas, deve negociar com o banco uma taxa de juro de 1,375%.

13.

13. **(AE 2018)**
Representado a linha do triângulo do Pascal cuja soma dos quatro últimos termos é 288 101, e os primeiros elementos da linha seguinte, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & 1 & & a & & b & & & & c & & \ldots & & \underbrace{c \quad b \quad a \quad 1}_{288101} \\ 1 & & d & & e & & 287\,980 & & \ldots \end{array}$$

Como a soma dos últimos quatro elementos da primeira linha representada é 288 101, temos que

$$1 + a + b + c = 288\,101$$

Observando a representação das duas linhas podemos observar que:

$$b + c = 287\,980$$

Assim, substituindo este valor na equação anterior, e resolvendo a equação obtemos o valor de a, ou seja do segundo elemento da primeira linha representada:

$$1 + a + b + c = 288\,101 \Leftrightarrow 1 + a + 287\,980 = 288\,101 \Leftrightarrow a = 288\,101 - 287\,980 - 1 \Leftrightarrow a = 120$$

13. **(AE 2023)**
Aplicando o método descrito com base nas votações dos 200 clientes, apresentadas na tabela, temos:

- Pontuação da praia do Almograve: $3 \times 82 + 3 \times 24 + 4 \times 51 + 3 \times 43 = 651$
- Pontuação da praia do Barril: $4 \times 82 + 1 \times 24 + 2 \times 51 + 1 \times 43 = 497$
- Pontuação da praia do Cabedelo: $2 \times 82 + 4 \times 24 + 1 \times 51 + 2 \times 43 = 397$
- Pontuação da praia da Duquesa: $1 \times 82 + 2 \times 24 + 3 \times 51 + 4 \times 43 = 455$

Assim, considerando as preferências conhecidas dos 200 clientes, a praia escolhida é a praia do Almograve com 651 pontos e a praia do Barril obteve apenas 497 pontos.

Mesmo na eventualidade dos restantes clientes terem escolhido a praia do Barril como 1.ª preferência e a praia do Almograve como a 4.ª preferência, o resultado da votação não seria alterado porque os totais das pontuações seriam:

- Pontuação da praia do Almograve: $651 + 1 \times 50 = 701$
- Pontuação da praia do Barril: $497 + 4 \times 50 = 697$

14. Temos que:

- Como a função derivada, f', tem apenas dois zeros associados a uma mudança de sinal, a função f admite apenas dois extremos e não três, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

- Como, pela observação do gráfico podemos verificar que no intervalo $[3, +\infty[$ a função derivada, f' é crescente, a respetiva derivada, ou seja a função f'', é positiva. Assim, concluímos que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima neste intervalo, e não para baixo, pelo que a afirmação **II.** é falsa.

x	3	$+\infty$
f'		$\nearrow$
f''		$+$
f		$\cup$

15. Temos que as coordenadas do vértice, V, da parábola são $(0, -1)$.

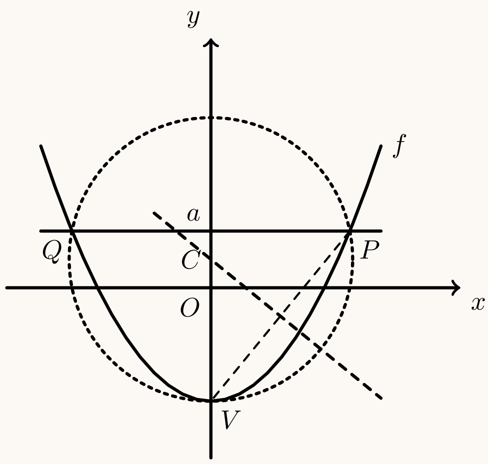
Determinando as ordenadas dos pontos de interseção da parábola com a reta, P e Q, em função de a, temos que:

$y = a \wedge y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = a \Leftrightarrow x^2 = a + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a+1}$

Observando que o centro da circunferência pertence à mediatriz do segmento de reta $[PV]$, escrevemos uma equação da mediatriz, considerando para as coordenadas do ponto P, $(\sqrt{a+1}, a)$:

$$(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = (x - \sqrt{a+1})^2 + (y-a)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x - \sqrt{a+1})^2 + (y-a)^2$$



Observando também que o centro da circunferência pertence ao eixo Oy, ou seja, à reta de equação $x = 0$ podemos determinar a sua ordenada, substituindo o valor da abcissa na equação da mediatriz:

$$0^2 + (y+1)^2 = (0 - \sqrt{a+1})^2 + (y-a)^2 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = (\sqrt{a+1})^2 + y^2 - 2ay + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y^2 + 2y + 1 = a + 1 - 2ay + a^2 \Leftrightarrow 2y + 2ay = a + a^2 \Leftrightarrow 2y(1+a) = a(1+a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a(1+a)}{2(1+a)} \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}$$

Assim temos que as coordenadas do ponto C são $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, pelo que o raio da circunferência é:

$$\overline{VC} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{a}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2} = \left|\frac{a}{2} + 1\right| \underset{a>-1}{=} \frac{a}{2} + 1$$